مطالعهٔ تجربی و عددی شکست آلومینیوم ۵۰۸۳ به‌کمک مدل غیر خطی مکانیک آسیب پیوسته★

محمدعلی فارسی[۱]　　امیررضا صحت[۲]

چکیده تئوری مکانیک آسیب پیوسته ابزاری است قدرتمند برای حل مسائلی هم‌چون تغییر شکل‌های پلاستیک بزرگ که مکانیک شکست سازه از تحلیل تأثیرات آن عاجز است. این مدل در چارچوب متغیرهای داخلی تئوری ترمودینامیک استخراج می‌شود و براساس نتایج آزمایشگاهی که بر روی خواص ماده انجام شده است، توسعه داده می‌شود. رشد میکروحفره‌ها، حاصل شکست غیر خطی کوپل‌شده با تغییر شکل‌های پلاستیک است. با توجه به این‌که چگالی و استحکام آلومینیوم برای استفاده در سازه‌های هوافضایی مناسب است از آن در ساخت بدنه و سازهٔ وسایل فضایی استفاده می‌شود. آلومینیوم ۵۰۸۳ نیز به‌خاطر رفتار مکانیکی مناسب و سهولت جوشکاری و ماشینکاری یکی از پرکاربردترین مواد در سازه موشک، حامل و کاوشگرهای فضایی است. در این مقاله، آسیب پیوسته در آلومینیوم ۵۰۸۳ براساس مدل غیر خطی بنورا بررسی شده است. شبیه‌سازی عددی رفتار ماده در حین شکست در نرم‌افزار آباکوس به‌وسیلهٔ سابروتین (USDFLD) انجام می‌شود و نتایج به‌دست آمده با نتایج آزمایشگاهی مقایسه و صحه‌گذاری می‌شود. این مقایسه نشان می‌دهد که نتایج شبیه‌سازی و آزمایش تجربی هم‌خوانی مناسبی با هم دارند و مدل بنورا برای مدل‌سازی آسیب در آلومینیوم مناسب است.

واژه‌های کلیدی مکانیک آسیب پیوسته; روش اجزای محدود; آلومینیوم; مدل بنورا.

Experimental and Numerical Study on Aluminum Damage Using a Nonlinear Model of Continuum Damage Mechanics

M.A. Farsi　　A.R. Sehat

Abstract *Continuum Damage Mechanics (CDM) is a powerful tool to solve problems such as large plastic deformation, Where the fracture mechanics is unable to analysis of its effects. Continuum damage mechanics in terms of the internal variable theory of thermodynamics is derived and based on the experimental results on material properties is developed. As regards, Aluminum has an important role in designing and construction of aerospace structures and devices, since its density and strength are suitable to aerospace applications. Al 5083 is one of the most widely used materials in the construction of missiles, space vehicles and sounding rocket structure. In this paper, the continuum damage mechanics principles are studied. Nucleation, development and propagation of damage in Al 5083 are investigated based on Bonora model as a non-linear model. FE simulation of material behavior during failures is carried out by ABAQUS software package and USDFLD subroutine. The results are validated with experimental tests. This comparison shows that the simulation results are agree with that of experimental tests, also the Bonora model can be used of damage modeling of AL 5083.*

Key Words Continuum Damage Mechanics; FEM; Aluminum 5083; Bonora Model.

★تاریخ دریافت مقاله ۹۳/۹/۱۱ و تاریخ پذیرش آن ۹۴/۳/۲۴ می‌باشد.

(۱) استادیار مهندسی مکانیک، پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم تحقیقات و فناوری، تهران.

(۲) نویسندهٔ مسئول: کارشناس ارشد، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، وزارت علوم تحقیقات و فناوری، تهران. Farsi@ari.ac.ir

مقدمه

مکانیک شکست شاخه‌ای از مکانیک جامدات می‌باشد که به بررسی ایجاد و گسترش ترک در جامدات و سازه‌ها، نحوهٔ تأثیر آن بر تغییر شکل و احیاناً زوال سازه می‌پردازد. این موضوعات از هر دو منظر مکانیک محیط‌های پیوسته و محیط‌های گسسته مورد مطالعه قرار گرفته است. مکانیک شکست، پدیدهٔ شکست را در مواد مختلف بررسی می‌کند و روش‌های طراحی برای عملکرد مطمئن سازه و یا قطعه را ارائه می‌نماید. این علم دارای کاربردهای بسیار گسترده‌ای در طراحی قطعات سازه‌ها و ماشین‌آلات صنایع مختلف مانند صنایع نیروگاهی، خودروسازی، کشتی‌سازی، هوافضا و ... می‌باشد. اگرچه امروزه تعداد سازه‌های که بر اثر پدیدهٔ شکست از هم گسیخته می‌شود، محدود است ولی هنوز عامل اصلی بسیاری از خرابی‌ها، شکست ترد و نرم می‌باشد [1]. لذا این امر یک تهدید جدی برای سازه‌ها، خصوصاً سازه‌های حساس در حوزهٔ مهندسی هوافضا است [2]. تحقیقات بسیاری در حوزهٔ شکست ترد و مدل‌سازی آن انجام شده است [3]؛ به‌عنوان مثال میرزایی و کریمی [٤] رشد ترک را در یک پرهٔ توربین گازی در اثر تنش‌های ترمودینامیکی بررسی نمودند؛ ولیکن حوزهٔ شکست نرم و آسیب پیوسته کمتر مورد توجه محققان قرار گرفته است. برخی از سازه‌ها و قطعات مهندسی در اثر شکست نرم از بین می‌روند و کارآیی خود را از دست می‌دهند. یکی از روش‌های اصلی در مدل‌سازی و تحلیل شکست نرم، روش مکانیک آسیب پیوسته (Continuum Damage Mechanic (CDM)) است [5].

هاف [6] نشان داد که برای یک میلهٔ تحت کشش، سطح مقطع به‌علت جریانی شبیه جریان لزج، صفر می‌شود. مطابقت نتایج آزمایشگاهی با نتایج حاصل از تئوری نشان داد که گسیختگی در کمتر از ۱۰ درصد از ازدیاد طول اتفاق می‌افتد. عدم پیش‌بینی تأثیر خزش در گسیختگی و یا عدم توزیع شکست در زمان کرنش‌های کوچک مهم‌ترین محدودیت‌های مدل هاف هستند. کاچانوف [7] مدل جدیدی ارائه داد که مبنای مدل‌سازی شکست نرم در خزش گردید، وی برای نخستین بار مبانی و اصول مکانیک آسیب پیوسته را بیان نمود و مدلی برای بررسی شکست با توجه به از دست رفتن انعطاف پذیری ارائه نمود.

آسیب‌دیدن و گسیختگی مواد نرم، ناشی از رشد و ترکیب میکروحفره‌ها است [5]. رشد حفره‌ها مشابه فرآیند رشد ترک به‌عنوان یک مشکل جدی در بررسی رفتار سازه‌ها محسوب می‌شود. ریس و تریسی [8] رابطه‌ای برای مشخص کردن میدان جریان در یک مادهٔ الاستیک و مواد غیر قابل تراکم پلاستیک که حاوی حفره است، پیشنهاد دادند [8]. سپس روش تقریبی ریلی–ریتز (Rayleigh-Ritz) را توسعه دادند. آنها برای بررسی حفره‌های کروی در مواد، فرض کردند رفتار ماده به‌صورت الاستیک- پلاستیک کامل (بدون کارسختی) است. هم‌چنین تغییرات حجم را براساس رشد حفره در سرتاسر قسمت‌های تغییر شکل یافته در نظر گرفتند. در نهایت نشان دادند که با افزایش کشش هیدرواستاتیک شکست نرم کاهش پیدا می‌کند.

در سال ۱۹۸۹ مدل غیرایزوتروپیک مکانیک شکست برای مشخص کردن رشد بحرانی ترک‌ها در صفحات آلومینیومی تحت تأثیر تغییر شکل‌های زیاد پلاستیک، توسط وانگ و چو [9] توسعه داده شد. این مدل برمبنای گسترش ترک‌های بحرانی همراه با روابط اجزا محدود توسعه یافت. آنها هم‌چنین بارهای بحرانی را با مقدار آزمایشگاهی مقایسه کردند.

یک مدل ایزوتروپیک آسیب پیوسته در چارچوب متغیرهای داخلی تئوری ترمودینامیک توسط چاندرخان و پاندی [10] پیشنهاد داده شد. این مدل آسیب براساس تنش مؤثر و اصول کرنش معادل بنا شده است. این مدل تغییرات غیر خطی را با توجه به کرنش

پلاستیک نشان می‌دهد. صحت‌سنجی این مدل با استفاده از نتایج آزمایشگاهی آلیاژ آلومینیوم انجام شد. اشکال این مدل پیچیدگی زیاد آن و استفاده از پارامترهایی است که محاسبهٔ آنها تجربی است و روش مشخصی برای تعیین آنها توسط نویسندگان ارائه نشده است.

بنورا [11] مدلی غیر خطی را براساس مشاهدات تجربی توسعه داد، که نشان می‌داد رشد حفره‌ها، نتیجهٔ آسیب غیرخطی همراه با تغییرشکل پلاستیک است. این مدل نشان می‌دهد در هنگام تغییر شکل‌های پلاستیک، تابع توزیعی برای پتانسیل شکست وجود دارد که تابعی غیرخطی برحسب مجموع کرنش مؤثر پلاستیک است. در این مدل ۳ مرحلهٔ متفاوت گسیختگی نرم به‌خوبی مدل شده است. همچنین این مدل بعداً برای تشریح اثر تنش سه‌محوره برای پیش‌بینی شکست نرم در فولاد A533 توسعه داده شد [12].

مکانیک آسیب پیوسته برای شکست خستگی نیز، در جایی که تغییر شکل پلاستیک نقش اصلی در ایجاد خرابی و گسیختگی دارد، قابل تعمیم است. بنورا [13] مدل غیر خطی آسیب را برای بارگذاری‌های سیکلی تعمیم داد. مزیت اصلی مدل ارائه شده توسط بنورا، محاسبهٔ پارامترهای مدل پیشنهاد شده با استفاده از نتایج آزمایش کشش یا بارگذاری سیکلی است.

برای مدل‌سازی رشد تقارن محوری و متصل شدن حفره‌های داخلی کوچک به یکدیگر در مواد الاستوپلاستیک، یک مدل جدید توسط پاردئون و همکاران [14] پیشنهاد شد. وی در حقیقت، مدل گلوگنو-لبند و مدل تامسون را توسعه داد.

برونیگ به تحلیل عددی تغییر شکل‌های بزرگ الاستیک-پلاستیک و شکست غیرایزوتروپیک براساس تئوری عمومی ماکروسکوپیک داخل چارچوب مکانیک آسیب پیوستهٔ غیر خطی پرداخت. وی از روش اجزای محدود برای خطی کردن مسائل در این تحلیل استفاده کرد و متغییرهای مؤثر را مورد بررسی قرار داد [15].

نبود مدل کلی برای نمایش آسیب، یک محدودیت جدی برای استفادهٔ گسترده از تکنیک‌های محاسباتی در شبیه‌سازی و پیش‌بینی رفتار سازه تحت بارگذاری دینامیکی بوده است. بنورا و میللا [16] در سال ۲۰۰۱، یک مدل کلی برای فلزات نرم با استفاده از ترکیب رابطهٔ حالت جامد میللا [17] و مدل غیر خطی آسیب بنورا [11] ارائه کرد. در این مدل تأثیرات متقابل نرخ کرنش و دما بر روی تنش تسلیم، جوانه‌زنی و رشد ترک در نظر گرفته شده است.

با توجه به این‌که برخی از مواد با توجه به ماهیت خود یا تکنولوژی تولید دارای رفتار غیرایزوتروپیک هستند، بررسی شکست و گسیختگی نرم در این مواد نیز مورد توجه محققان بوده و مدل‌هایی برای پیش‌بینی رفتار این مواد در شکست نرم ارائه شده است [18].

مشایخی و ضیایی راد [19] از یک پروسهٔ تجربی برای تعیین متغیرهای شکست A533-B1 فولاد استفاده کردند. آنها یک مدل آسیب کاملاً کوپل الاستیک – پلاستیک را در نرم‌افزار آباکوس توسعه دادند. سپس این مدل را برای شبیه‌سازی رفتارگسیختگی نرم بر روی قطعهٔ شیاردار به‌کار گرفتند. متغیرهای آسیب حاصل در شبیه‌سازی قطعه تحت تست فشار مورد استفاده قرار گرفت. آنها نیروهای عکس‌العملی و بار بحرانی برای شروع ترک را محاسبه و با مقدار حاصل از آزمایش مقایسه کردند.

تاکر و پاندی [20] یک مدل برای تغییرات آسیب پیوستهٔ ایزوتروپیک در چهارچوب متغیرهای داخلی ترمودینامیک ارائه دادند. این مدل براساس اصول تنش مؤثر و کرنش معادل است [20].

در این مقاله آلومینوم ۵۰۸۳ به‌خاطر کاربردهای فراوان در حوزهٔ هوافضا به‌ویژه در ساخت سازه و قطعات فضایی (به‌عنوان مثال جنس سازهٔ کاوشگر پژوهش از این آلومینیوم است) مورد بررسی قرار

گرفته است. با توجه به این‌که مدل ارائه شده توسط بنورا [11] یکی از روابط مهم و کاربردی در این حوزه است، از آن برای مدل‌سازی غیر خطی آسیب استفاده شد. رفتار ماده در نمونه‌های استاندارد و سوراخ‌دار به‌صورت تجربی و عددی بررسی شده است. برای این کار قطعه‌ای از جنس آلومینیوم آلیاژی ۵۰۸۳، براساس استاندارد (ASTM E08) ساخته شد و در دستگاه تست کشش تا لحظهٔ گسیختگی مورد کشش قرار گرفت (آزمون‌ها در آزمایشگاه مواد پژوهشکدهٔ حمل و نقل وابسته به پژوهشگاه فضایی ایران انجام شده است). براساس نتایج این آزمون پارامترهای اصلی مدل استخراج شد. برای بررسی صحت مدل در پیش‌بینی رفتار ماده، قطعه‌ای تحت بارگذاری سیکلی قرار گرفت. بارگذاری و باربرداری در محدودهٔ رفتار پلاستیک ماده انجام شد. هم‌چنین در این مقاله، برای بررسی اثر تنش غیر یکنواخت و توانایی مدل غیر خطی در پیش‌بینی رفتار ماده، یک نمونهٔ سوراخ‌دار برای شبیه‌سازی تمرکز تنش مورد استفاده قرار گرفته است. در مدل‌سازی عددی رفتار ماده از نرم‌افزار آباکوس استفاده می‌شود و به‌کمک سابروتین (USDFLD)، مدل غیرخطی پیاده‌سازی می‌شود. نحوهٔ انجام آزمون‌ها و شبیه‌سازی و نتایج به‌دست آمده ارائه شده است.

مبانی کلی شکست نرم

شکست در فلزات به‌صورت دو دسته کلی شکست نرم و ترد رخ می‌دهد. با توجه به ساختار بلوری فلزات، درجهٔ حرارت، میزان نیرو، نرخ بارگذاری و ابعاد قطعه یکی از این نوع شکست‌ها رخ می‌دهد. از مشخصات شکست نرم می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد: گلویی شدن موضع شکست تحت تأثیر تنش کششی، یا نازکی موضعی و ایجاد حفره‌های بسیار ریز در درون قسمت گلویی، اتصال آنها به یکدیگر تا رسیدن به حد یک ترک ریز و رشد آرام ترک تا حد پارگی یا شکست نهایی است [21].

در شکست نرم، در ناحیهٔ گلویی ابتدا حفره‌های ریز جوانه می‌زنند و سپس این حفره‌ها رشد می‌کنند و به هم می‌پیوندند و گسیختگی ایجاد می‌شود. با تکرار این عملیات(جوانه‌زنی حفره‌ها و پیوستن آنها به یکدیگر) خرابی رشد می‌کند و پس از رسیدن به میزان بحرانی، سرعت رشد خرابی و آسیب افزایش می‌یابد و باعث ایجاد شکست نهایی می‌شود [5]. توانایی پیش‌بینی شروع خرابی، از مسائل مهم این حوزه است. برای بررسی آن معمولاً سه روش کلی وجود دارد که عبارتند از:

الف. معیار شکست ناگهانی (Abrupt Failure Criteria). بر مبنای این روش خرابی موقعی اتفاق می‌افتد که یک متغیر خارجی که غیر کوپل با متغیرهای داخلی است، به مقدار بحرانی خود برسد [21].

ب. رفتار پلاستیک مواد متخلخل (Porous Solid Plasticity). این روش ماده را به‌صورت ماده متخلخل فرض می‌کند و آسیب بر مبنای میزان و سرعت به هم پیوستگی حفره‌ها بیان می‌شود [21].

ج. مکانیک آسیب پیوسته. در این روش فرض بر این است که خرابی یک پارامتر داخلی است که به‌صورت یک پروسهٔ برگشت‌ناپذیری در ساختار میکروماده اتفاق می‌افتد [5]. در این مقاله این روش بررسی می‌شود و در پیش‌بینی رفتار ماده و مدل‌سازی آسیب در آلومینیوم ۵۰۸۳ استفاده می‌شود.

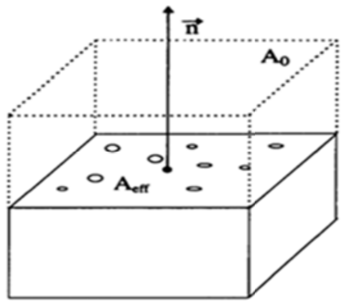
مدل مکانیک آسیب پیوسته

آسیب یک متغیر ترمودینامیکی است که به‌عنوان از دست رفتن توانایی تحمل بار توسط ماده بیان می‌شود. آسیب در پی تغییر شکل پلاستیک شروع می‌شود و

درنتیجهٔ تغییرات برگشت‌ناپذیری مثل جوانه‌زنی ترک‌ها (CrackNucleation) و رشد حفره‌ها در ماده به‌وجود می‌آید که منجر به گسیختگی در ماده می‌شود.

از دیدگاه فیزیکی، آسیب به‌صورت کاهش سطح مقطع نامی در المان حجمی مرجع (Representative Volume Element) که تمام متغیرها در این عنصر حجمی هموژن در نظرگرفته می‌شود، تعریف می‌شود.

کاهش سطح مقطع به‌خاطر جوانه‌زنی، رشد میکروترک‌ها و میکروحفره‌ها است. ناپیوستگی‌ها و آسیب‌ها با توجه به اندازهٔ المان حجمی کوچک هستند، اما در مقایسه با فضاهای اتمی ماده بزرگ هستند. آسیب همواره به کرنش برگشت‌ناپذیر پلاستیک و توزیع کرنش در مقیاس مسو، مقیاس المان حجمی مرجع و یا مقیاس میکرو مرتبط است. در تمام مقیاس‌ها میزان آسیب به‌عنوان یک پارامتر وجود دارد، به همین علت چندین تعریف برای متغیر آسیب وجود دارد.



شکل ۱ سطح مقطع نامی درالمان حجمی مرجع

در حالت کلی احتمالاً میکروحفره‌ها و میکروترک‌ها هم‌زمان وجود دارند، متغیر آسیب به‌صورت فیزیکی به‌وسیلهٔ چگالی سطحی میکروترک‌ها و فصل مشترک میکروترک‌ها با صفحه‌ای متقاطع از در المان حجمی مرجع تعریف می‌شود (شکل ۱). برای یک صفحه با بردار نرمال $\vec{n}$ رابطهٔ (۱) برای تعریف متغیر آسیب ارائه می‌شود [5].

$$D(\vec{n}) = 1 - \frac{A_{eff}^{(\vec{n})}}{A_0^{(\vec{n})}} \qquad (۱)$$

در این رابطه $\vec{n}$ بردار نرمال، $A_0^{(\vec{n})}$ سطح مقطع نامی در المان حجمی مرجع و $A_{eff}^{(\vec{n})}$ سطح مؤثر آن است. متغیر آسیب، وابسته به انتخاب بردار نرمال $\vec{n}$ است و باید برای توصیف آن از رابطهٔ تانسوری استفاده شود.

با توجه به این‌که مادهٔ مورد بررسی (آلومینیوم ۵۰۸۳) یک مادهٔ ایزوتروپیک و همگن است، می‌توان فرض کرد توزیع ترک‌ها و حفره‌ها در المان حجمی یکنواخت است و متغیر آسیب (D) وابسته به جهت بردار $\vec{n}$ نیست و برابر است با:

$$D = 1 - A_{eff}/A_0 = \frac{A_D}{A_0} \qquad (۲)$$

که A_D بیانگر مساحت حفره‌ها در سطح مقطع المان حجمی است.

در حالت بارگذاری محوری که نیروی F عمود بر سطح مقطع در المان حجمی مرجع اعمال می‌شود و با در نظر گرفتن تعریف تنش $\sigma = F/A_0$ و جای‌گذاری $A_{eff} = A_0(1-D)$ با فرض ایزوتروپیک بودن ماده، رابطهٔ تنش مؤثر به‌صورت رابطهٔ (۳) تعریف می‌شود.

$$\sigma_{eff} = \frac{\sigma}{1-D} \qquad (۳)$$

براساس تعریف تنش مؤثر، رفتار ماده در حالت آسیب‌دیده تنها تحت تأثیر تنش مؤثر است، به عبارت دیگر معادلات در حالت بررسی آسیب مثل معادلات در حالت عادی است با این تفاوت که تنش مؤثر جایگزین تنش در معادلات می‌شود.

برای به‌دست آوردن معادلات کلی یک مادهٔ مشخص در چارچوب پدیده‌های برگشت‌ناپذیر ترمودینامیک از متغیرهای حالت استفاده می‌شود. هم‌چنین برای توصیف یک ماده، یک حالت پتانسیلی معرفی می‌شود. معمولاً از انرژی آزاد هلمتز (Ψ) که

تابع اسکالر تمام متغیرهای داخلی است، برای آن استفاده می‌شود. قانون حالت بیانگر ارتباط بین متغیرهای داخلی x_i و متغیرهای وابستهٔ داخلی y_i است (رابطهٔ ٤).

$$yi = \frac{\partial(\rho\Psi)}{\partial xi} \qquad (٤)$$

که ρ چگالی ماده است.

برای حالت داده‌شده، آسیب تنها تنش‌های مؤثر را تغییر می‌دهد [12]. براساس رابطهٔ (٤) این امکان وجود دارد که تأثیرات الاستیک با تأثیرات پلاستیک در پتانسیل حالت غیرکوپل باشد یا به عبارت دیگر مستقل از یکدیگر باشند (رابطهٔ ٥).

$$\Psi = \Psi_e(\varepsilon_{ij}^e, T, D) + \Psi_P(T, r, x) \qquad (٥)$$

که در این رابطه T دما، r متغیر داخلی سختی یکنواخت و x متغیر داخلی سختی جنبشی است.

در چارچوب ترموالاستیک خطی، معادلات حالت آسیب را می‌توان از پتانسیل Ψ_e به‌دست آورد، لذا رابطه‌های (٧ و ٦) برای متغیر وابسته آسیب بیان می‌شود.

$$Y = \rho\frac{\partial\Psi_e}{\partial D} \qquad (٦)$$

$$Y = -\frac{\sigma_{eq}}{2E(1-D)^2} f\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}}\right) \qquad (٧)$$

در این روابط Y نرخ آزادسازی انرژی کرنش شکست، E مدول الاستیک، σ_{eq} معادل تنش ون میزز است و σ_H تنش هیدرواستاتیک است.

برای کامل کردن معادلات به قانون و قاعده‌ای برای بیان تغییرات متغیرهای داخلی نیاز است. در حالتی که پدیده برگشت‌ناپذیر است، لازمهٔ قانون دوم ترمودینامیک این است که اتلاف مربوط به کار مکانیکی باید مثبت باشد، لذا:

$$\dot{\varepsilon}^p : \sum_k Y_k \dot{x}_k - \dot{D}\, Y - \sigma \gg 0 \qquad (٨)$$

در این رابطه $\dot{\varepsilon}^p$ نرخ کرنش، $\dot{D}$ نرخ تغییرات آسیب، $\dot{x}_k$ نرخ تغییرات سختی دینامیکی است.

براساس قانون ترمودینامیک، معیاری که تغییرات متغیرهای داخلی را کنترل می‌کند، از پتانسیل اتلاف (F) به‌دست می‌آید. از مشاهدهٔ نتایج آزمایشگاهی نتیجه می‌شود که جریان پلاستیک و خرابی در پتانسیل توزیع از یکدیگر می‌توانند جدا باشند [11]. استفاده از تبدیل لژاندر –فرنچل به ما امکان بیان توزیع پتانسیل را به‌صورت تابعی از متغیرهای داخلی برای ارضای قانون دوم ترمودینامیک می‌دهد [11].

$$F = F_P(\sigma, R, X) + F_D(Y) \qquad (٩)$$

در این رابطه R سختی یکنواخت و X سختی دینامیکی وابسته است.

رابطهٔ تغییرات برای متغیر آسیب به‌صورت رابطهٔ (١٠) تعریف می‌شود.

$$\dot{D} = -\dot{\lambda}\frac{\partial F_D}{\partial Y} \qquad (١٠)$$

که در این رابطه $\dot{\lambda}$ نرخ کرنش پلاستیک و F_D توزیع پتانسیل آسیب است. این رابطه بیانگر کوپل بین نرخ گسیختگی و نرخ کرنش پلاستیک مجموع به‌وسیلهٔ ضریب پلاستیک ($\dot{\lambda}$) است.

برای کامل کردن معادلات کلی، نیاز به تعیین توزیع پتانسیل آسیب (F_D) است. براساس قانون دوم ترمودینامیک توزیع شکست باید مثبت باشد و هم‌چنین پتانسیل آسیب باید یک تابع محدب باشد. این توزیع برای شکست نرم به خاطر مراحل جوانه زنی، رشد حفره‌ها و ترکیب آنها که به شدت غیر خطی است، استفاده می‌شود [11]. مدل‌ها و توابع توزیع پتانسیل مختلفی ارائه شده است که در این مقاله

براساس مطالعات انجام شده مدل بنورا [11] برای بررسی رفتار غیرخطی ایجاد و رشد گسیختگی در ماده انتخاب می‌شود [22].

توزیع پتانسیلی که بنورا [11] ارائه کرده است به‌صورت رابطۀ (۱۱) است.

$$F_D= [(\frac{1}{2})(\frac{-Y}{S_0})^2(\frac{S_0}{1-D})]\frac{{D_{cr}}^{S-1/S}}{p^{2+n/n}} \quad (۱۱)$$

که S_0 ثابت ماده، S توان مخصوص شکست ماده و n توان کار سختی است.

با مشتق‌گیری از رابطۀ (۱۱) براساس قانون تغییرات (رابطۀ ۱۰)، روابط (۱۳ و ۱۲) به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial F_D}{\partial \gamma} = \frac{\gamma}{S_0}\frac{(D_{cr}-D)^{S-1/S}}{p^{2+n/n}}\frac{1}{1-D} \quad (۱۲)$$

$$\frac{\partial F_D}{\partial \gamma} = -\left(\frac{\sigma_{eq}^2}{(1-D)^2}\right)\times f\left(\frac{\partial F_D}{\partial Y}\right)(\frac{1}{1-D})\frac{D_{cr}-D^{S-1/S}}{p^{2+n/n}})\frac{1}{2ES_0} \quad (۱۳)$$

برای مواد نرم، تنش مؤثر ون میزز می‌تواند به‌عنوان تابعی از کرنش پلاستیک مجموع با استفاده از قانون رامبرگ – آسگود (رابطۀ ۱٤) بیان شود [23].

$$\frac{\sigma_{eq}}{1-D} = KP^{1/n} \quad (۱٤)$$

که پارامترهای K و n ثابت ماده هستند. با جای‌گذاری رابطۀ (۱٤) در رابطۀ (۱۳)، رابطۀ (۱۵) به‌دست می‌آید.

$$D = \frac{K^2}{2ES_0}(D_{cr}-D)^{S-1/S}f(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}})\frac{\dot{p}}{p} \quad (۱۵)$$

رابطۀ (۱۵) را می‌توان براساس حالت‌های مشخص بارگذاری و با فرض ثابت ماندن ضریب تنش سه‌محوری براساس زمان به‌سادگی انتگرال گرفت. از رابطۀ (۱۵) بین حالت ابتدایی $D=D_0$ و D_{cr} مقدار بحرانی آسیب در لحظۀ شکست، انتگرال‌گیری می‌شود. تعیین مقدار D_0 بسیار مشکل است، چون مستقیماً به توزیع حفره در میکروساختار مادۀ اولیه بستگی دارد. به‌همین علت مقدار D_0 اغلب صفر درنظر گرفته می‌شود. در مادۀ مورد استفاده (ورق نورد شده) این فرض قابل قبول است. مقدار D_{cr} مقداری است که ماده به‌ازای آن دیگر توانایی تحمل بار خارجی را ندارد.

فرآیند آسیب تا زمانی که کرنش مؤثر مجموع p به کرنش آستانه می‌رسد، غیر فعال است. وقتی $p=p_{th}$ می‌شود، جوانه‌زنی در مرحلۀ رشد حفره‌ها غالب است. وقتی $D=D_{cr}$ است، ترکیب حفره‌ها در فرآیند رشد گسیختگی غالب است. در نهایت زمانی که کرنش مجموع پلاستیک p به مقدار بحرانی p_{cr} می‌رسد، گسیختگی اتفاق می‌افتد. با انتگرال‌گیری از رابطۀ (۱۵) بین $[D, D_{cr}]$ و $[P,P_{cr}]$ رابطۀ (١٦) به‌دست می‌آید.

$$(D_{cr}-D)^{1/S}= \frac{1}{S}\frac{K^2}{2ES_0}\ln(\frac{p_{cr}}{p_{th}})f(\frac{\sigma_H}{\sigma_H}) \quad (١٦)$$

در حالت بار محوری رابطۀ (۱۷) برابر یک خواهد بود [11].

$$f(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}})=1 \quad (۱۷)$$

در این‌جا می‌توان از کرنش الاستیک چشم پوشید و کرنش پلاستیک را به‌جای کل کرنش محوری استفاده کرد. درنتیجه خواهیم داشت:

$$(D_{cr}-D_0)^{1/S}= \frac{1}{S}\frac{K^2}{2ES_0}\ln(\frac{p_{cr}}{p_{th}}) \quad (۱۸)$$

مقدار D_{cr} به‌صورت تجربی محاسبه می‌شود و رابطۀ (۱۸) امکان محاسبۀ ثابت $\frac{K^2}{2ES_0}$ را باکمک تست محوری می‌دهد. با جای‌گذاری رابطۀ (۱۸) در رابطۀ (١٦)، رابطۀ (۱۹) نتیجه می‌شود.

$$D=D_0+(D_{cr}-D_0)\left(1-\left[1-\frac{\ln(p/p_{th})}{\ln(\varepsilon_{cr}/\varepsilon_{th})}\right]^{s}\right) \quad (۱۹)$$

با توجه به تست کشش و به‌دست آوردن σ_R و σ_u مقدار D_{cr} را با استفاده از رابطه (۲۰) به‌دست می‌آید [5].

$$D_{cr}=1-\frac{\sigma_R}{\sigma_u} \quad (۲۰)$$

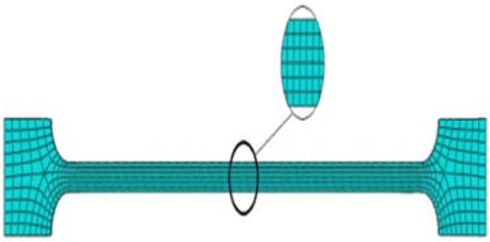
در اکثر مواقع در حالت محوری نسبت $\frac{p_{cr}}{p_{th}}$ با نسبت $\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{th}}$ برابر است [12].

شبیه‌سازی عددی

روش اجزای محدود، روشی عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل جزئی و نیز حل رابطه‌های انتگرالی است. اساس کار این روش حذف کامل معادلات دیفرانسیل یا ساده‌سازی آنها به معادلات دیفرانسیل معمولی است، که با روش‌های عددی مانند اویلر حل می‌شوند [23].

با توجه به توانمندی نرم‌افزار آباکوس در تحلیل مسائل غیرخطی در این تحقیق از آن برای مدل‌سازی و انجام تحلیل استفاده می‌شود.

نوع المانی که برای شبکه‌بندی (مش‌بندی) (شکل ۲) استفاده می‌شود، المان C3D8 است که یک المان خطی با هشت گره است که توانایی مدل‌سازی تغییر فرم‌های زیاد را دارد [24].



شکل ۲ قطعه‌مش‌زده شده

تمام شرایط مرزی و نحوهٔ بارگذاری در هنگام آزمایش تجربی، در نرم‌افزار آباکوس اعمال می‌شود، اما این نرم‌افزار توانایی اعمال متغیر آسیب D و نمایش آن به‌عنوان پارامتر خروجی را ندارد، بنابراین با کمک سابروتین (USDFLD) شرایط واقعی رفتار ماده و گسیختگی مدل‌سازی می‌شود.

سابروتین (USDFLD) برای تعریف متغیرهای میدانی در گره‌ها به‌عنوان تابعی از زمان یا هر مشخصهٔ ماده که در پنجرهٔ متغیرهای خروجی مشخص است و هم‌چنین برای معرفی راه‌حل وابسته به خواص مواد استفاده می‌شود [24].

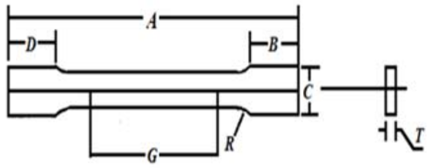
آزمایش‌های تجربی

صحه‌گذاری نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها و بررسی دقیق‌تر مدل‌ها و هم‌چنین استخراج پارامترهای مورد نیاز ماده، مستلزم انجام آزمایش تجربی است. این آزمایش‌ها به‌صورت تست کشش تک‌محوره انجام شده است. به همین منظور از دستگاه تست کشش یونیورسال هیدرولیک مدل GT-7001-LC استفاده شده است (شکل ۳). این آزمایش در محل آزمایشگاه مواد پژوهشکدهٔ حمل و نقل وابسته به پژوهشگاه فضایی ایران انجام شد.



شکل ۳ دستگاه تست کشش یونیورسال هیدرولیک GT-7001-LC

در آزمایش اول قطعه‌ای از جنس آلومینیوم ۵۰۸۳ (شکل ٤) که براساس استاندارد (ASTM E08) با ابعاد داده‌شده در جدول (۱) ساخته شده است تحت آزمایش کشش قرار گرفت.

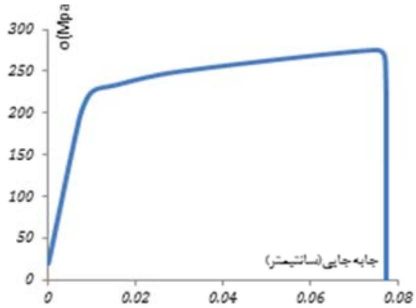


شکل ٤ قطعهٔ آزمایش کشش استاندارد

جدول ۱ ابعاد قطعهٔ آزمایش اول

پارامتر	اندازه (mm)
A	۲۰۳
B	۵۰.۸
C	۱۹.۳
D	۵۰.۸
G	۹۰.٦
R	۷.۲
T	۲

شکل (۵) نمودار حاصل از آزمایش کشش را نشان می‌دهد. در این آزمایش خواص مکانیکی و نمودار تنش-جابه‌جایی مشخص می‌شود و در سایر آزمایش‌ها استفاده می‌شود. مقادیر حاصل از آزمایش کشش به‌صورت جدول (۲) است و هم‌چنین شکل قطعهٔ آزمایش اول بعد از شکست در شکل (٦) ارائه شده است.



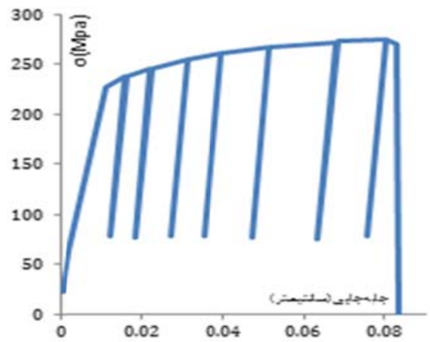
شکل ۵ تغییرات تنش-جابه‌جایی قطعهٔ آزمایش اول

جدول ۲ خواص مکانیکی به‌دست آمده از آزمایش کشش

پارامتر	مقدار
تنش تسلیم	236MPa
میزان استحکام نهایی	275 MPa
تنش شکست	253 MPa
کرنش شکست	0.11164

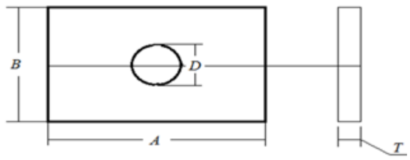

شکل ٦ قطعهٔ آزمایش اول بعد از شکست

قطعهٔ آزمایش دوم کاملاً مشابه قطعهٔ آزمایش اول است و در این آزمایش مشابه آزمایش اول نمونهٔ استاندارد تحت کشش قرار می‌گیرد، ولی در منطقهٔ پلاستیک، بارگذاری سیکلی بر قطعه وارد می‌شود. به‌کمک این آزمایش توانمدی مدل در حالت بارگذاری سیکلی بررسی شده است. نتیجهٔ آزمایش در شکل (۷) ارائه شده است.



شکل ۷ تغییرات تنش-جابه‌جایی قطعهٔ آزمایش دوم

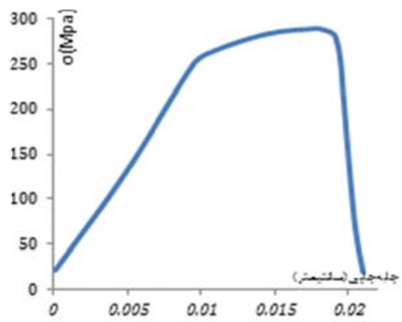
برای بررسی توانایی مدل در پیش‌بینی رفتار ماده هنگام اعمال تنش غیر یکنواخت، در آزمایش سوم از قطعهٔ سوراخ‌دار مطابق شکل (۸) و با ابعاد مشابه جدول (۳) استفاده شد. نتیجهٔ آزمایش سوم در شکل (۹) ارائه شده است و هم‌چنین تصویر قطعهٔ آزمایش سوم بعد از شکست در شکل (۱۰) آورده شده است.



شکل ۸ قطعهٔ سوراخ‌دار

جدول ۳ ابعاد قطعهٔ سوراخ‌دار

پارامتر	اندازه (mm)
A	۲۰۰
B	۲۸
D	۱۰
T	۲



شکل ۹ تغییرات تنش براساس جابه‌جایی آزمایش سوم



شکل ۱۰ قطعهٔ آزمایش سوم بعدازشکست

بررسی نتایج

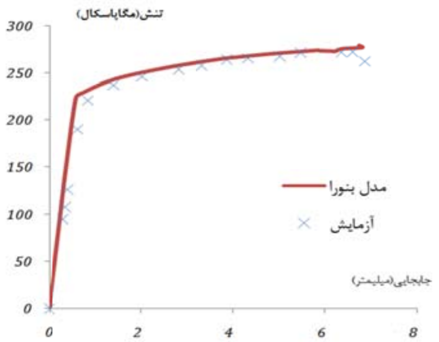
با توجه به آزمایش‌های انجام شده، فرآیند آزمایش‌ها به‌صورت عددی به‌وسیلهٔ نرم‌افزار آباکوس و به‌کمک سابروتین (USDFLD) شبیه‌سازی می‌شود و در ادامه نتایج حاصل از شبیه‌سازی با مقادیر تجربی و نتایج آزمایش‌ها مقایسه می‌شوند.

در شبیه‌سازی‌ها با توجه به نتایج حاصل از آزمون کشش و مقادیر پیشنهادی توسط مرجع [11] برای پارامتر s، پارامترهای مورد نیاز به‌صورت جدول (٤) در نظر گرفته شد.

جدول ٤ مقادیر در نظر گرفته شده برای شبیه‌سازی

$\varepsilon_{Threshold}$	$\varepsilon_{Rupture}$	D_{Cr}	α	E (GPa)	υ	s
0.0129	0.11164	0.36	0.75	70	0.3	0.5

نتایج به‌دست آمده از آزمایش اول (کشش تک‌محوره) با نتایج حاصل از تحلیل عددی براساس مدل آسیب بنورا مقایسه شده است (شکل ۱۱ و جدول ۵). همان‌طور که شکل (۱۱) و جدول (۵) نشان می‌دهند، مدل غیرخطی بنورا پیش‌بینی خوبی از رفتار مادهٔ مورد نظر در آزمایش کشش ساده دارد. در این حالت، مدل بنورا در حالت تغییر فرم الاستیک و پلاستیک به‌خوبی رفتار ماده را مدل می‌کند و برای پیش‌بینی لحظهٔ شکست نیز مناسب است.



شکل ۱۱ تغییرات تنش–جابه‌جایی برمبنای مدل بنورا و نتایج آزمایش اول

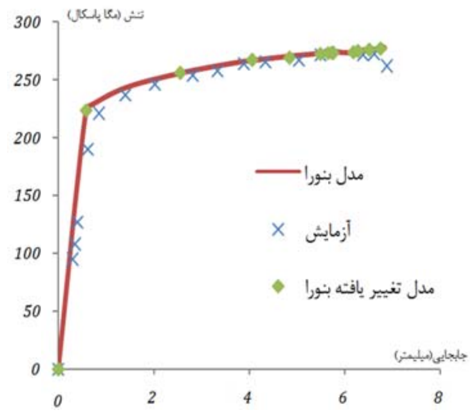
جدول ۵ محاسبهٔ درصد خطاهای مدل بنورا

جابه‌جایی (mm)	σ_{Test} (MPa)	σ_{bonora} (MPa)	درصد خطا مدل بنورا در مقایسه با تست ٪
٦/٨	۲۷۳/۲	۲۷۵/۲	۰/۷۳
٦/١	۲۷۲/۱	۲۷٤/٥	۰/۹۰
٥/٤	۲۷۰/۲	۲۷۲/٤	۱
٥	۲٦٥.۲	۲٦٨/۳	۱/۱٥
۳/۹	۲٥۷.۷	۲٦۱/۰۱	۱/۲۸

با توجه به اهمیت پارامتر s (توان مخصوص شکست ماده) در رابطهٔ (۲۲) بنورا، اثر تغییر آن در دقت به‌دست آمده برای شبیه‌سازی عددی بررسی می‌شود. برای این کار مقدار s به‌صورت جدول (٦) درنظر گرفته می‌شود و نتایج حاصل در شکل (۱۲) ارائه شده است.

جدول ٦ مقدار s در مدل بنورا

s -Bonora	s- Edited Bonora
۰/٥	۰/۷



شکل ۱۲ تغییرات نیرو-جابه‌جایی برمبنای مدل بنورا، تغییریافتهٔ بنورا و نتایج آزمایش اول

جدول ۷ محاسبهٔ درصد خطاهای مدل بنورا و تغییریافتهٔ بنورا

σ_{Test} (MPa)	$\sigma_{Edit\ Bonora}$ (MPa)	درصد خطای بنورای تغییریافته در مقایسه با تست	σ_{Bonora} (MPa)	درصد خطای بنورا در مقایسه با تست
۲۷۳/۲	۲۷۵/۱	۰/٦٥	۲۷٥/٦	۰/۷۳
۲۷۲/۱	۳۷٤/۹۹	۰/۹٥	۲۷٤/٥	۰/۹
۲۷۲/۲	۲۷۲	۰/۹٦	۲۷۲/٤	۱
۲٦٥/۲	۲٦۷/۷	۱/۰۱	۲٦۸/۳	۱/۱٥
۲٥۷/۷	۲٦۰/٦	۱/۱۲٦	۲٦۱/۰۱	۱/۲۸

جدول ۸ میانگین درصد خطاهای مدل بنورا و تغییر یافته بنورا

میانگین درصد خطاهای مدل بنورا	میانگین درصد خطاهای مدل تغییر یافته بنورا
۱/۰۲	۰/۹۳

نتایج نشان می‌دهد (جدول ۸ و ۷) که مدل تغییر یافتهٔ بنورا با مقدار پیش‌فرض s=0.5، از دقت خوبی برای پیش‌بینی رفتار قطعهٔ تحت آزمایش کشش برخوردار است. با تغییر مقدار s دقت نتایج به‌دست آمده اندکی بهبود می‌یابد ولیکن این تغییر چندان قابل توجه نیست.

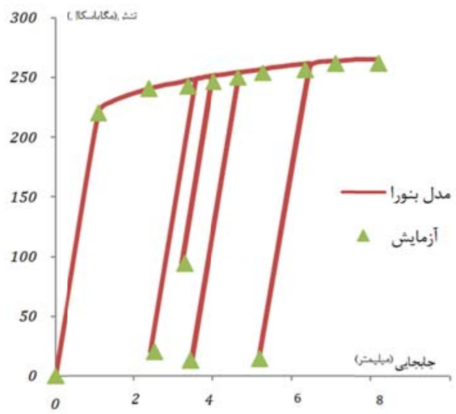
یکی از روش‌های ارزیابی مدل آسیب پیوسته بررسی و ارزیابی آن در پیش‌بینی لحظهٔ شکست در هنگام بارگذاری متناوب و سیکلی است. برای این منظور، نمونه‌ای تحت بارگذاری سیکلی قرار گرفت و هنگام آزمون فرآیند بارگذاری و باربرداری به دفعات تکرار شد تا در نهایت شکست قطعه رخ داد. این فرآیند در محدودهٔ تغییر شکل پلاستیک انجام شد و مقدار نیرو در فرآیند باربرداری به صفر نزدیک شد ولیکن هیچ‌گاه صفر نشد. در تحلیل عددی نیز مشابه این شرایط شبیه‌سازی شد. با استفاده از توانمندی نرم‌افزار آباکوس و استفاده از مراحل بارگذاری (Step) این فرآیند اعمال گردید.

نتایج حاصل در شکل (۱۳) نشان داده شده است. همان‌طور که از این شکل مشخص است، مدل بنورا دارای دقت خوبی نیز برای این قطعه و مدل‌سازی بارگذاری سیکلی برخوردار است. هم‌چنین مدول الاستیک (شیب نمودار تنش-کرنش در محدودهٔ الاستیک هر بار بارگذاری) در هر بار بارگذاری تغییر می‌کند ولیکن مدل بنورا به‌خوبی این تغییر را در نظر می‌گیرد. با مقایسهٔ نتایج آزمایش اول و دوم، در حالت بارگذاری متناوب در محدودهٔ پلاستیک می‌توان گفت:

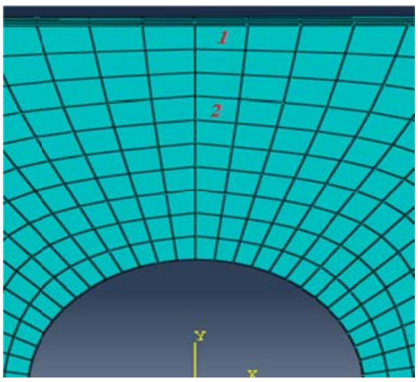
با توجه به این‌که ماهیت تنش تک‌محوره چندان تغییر نمی‌کند، مدل غیر خطی بنورا برای پیش‌بینی رفتار ماده و لحظهٔ شکست از دقت قابل قبولی برخوردار است.

برای بررسی اثر تنش سه‌بعدی و تغییرات هندسی سازه در پیش‌بینی رفتار سازه، از یک قطعهٔ سوراخ‌دار استفاده شد. وجود سوراخ سبب به‌هم ریختن توزیع تنش می‌شود و در محل آسیب توزیع تنش یکنواخت نیست. در آزمون تجربی فقط خروجی نیروی اعمالی و جابه‌جایی کل ثبت شد. در تحلیل عددی چون توزیع تنش یکنواخت نبود مقدار تنش در نقاط مختلف متناسب با فاصله از لبهٔ سوراخ متغیر بود. بنابراین برای دست‌یابی به جواب مناسب از روش میانگین‌گیری استفاده شد. برای این امر مقدار تنش در دو نقطه مطابق شکل (١٤) محاسبه شد و میانگین آنها استفاده شد. این نقاط بر روی محیط بیرونی و در وسط نمونه (فاصلهٔ یکسان از لبهٔ سوراخ و لبهٔ قطعه) انتخاب شدند.

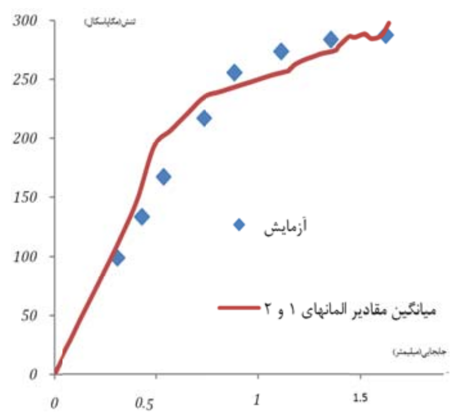
با توجه به شکل (١٥) میانگین مقادیر دو المان برای پیش‌بینی تنش و مقدار آسیب دارای دقت مناسبی است. به‌ویژه در پیش‌بینی لحظهٔ وقوع گسیختگی و شکست این دقت قابل قبول است. دقت مدل در این حالت در مقایسه با حالت تک‌محوره و توزیع تنش یکنواخت کمتر است. یکی از مهم‌ترین دلایل این اختلاف می‌تواند فرض $(f(\frac{\sigma_H}{\sigma_{eq}})=1)$ باشد که در توسعهٔ روابط متغیرآسیب در نظر گرفته شده است. زیرا در هنگامی که قطعه سوراخ‌دار است این فرض برقرار نیست و لازم است که این رابطه دقیق‌تر محاسبه شود. در تحقیق آتی نویسندگان، این مسأله بررسی خواهد شد. همچنین این اختلاف ممکن است به‌خاطر فرض ایزوتروپیک ماده نیز باشد زیرا در حالت واقعی رفتار ماده به‌طور کامل ایزوتروپیک نیست.



شکل ١٣ تغییرات نیرو-جابه‌جایی برمبنای مدل بنورا و نتایج آزمایش دوم



شکل ١٤ المان‌های انتخاب شده برای تحلیل قطعهٔ آزمایش سوم



شکل ١٥ تغییرات تنش-جابه‌جایی قطعهٔ شمارهٔ ٣ براساس میانگین المان ١و٢

نتیجه‌گیری و پیشنهاد

در این مقاله رفتار ماده و فرآیند گسیختگی در آلومینیوم ۵۰۸۳ براساس تئوری مکانیک آسیب پیوسته به‌صورت تجربی و عددی بررسی شد. در مدل‌سازی عددی از مدل غیر خطی بنورا استفاده شد و آزمایش‌های تجربی برروی سه قطعه انجام گردید. مدل بنورا در نرم‌افزار آباکوس به‌وسیلهٔ سابروتین (USDFLD) اعمال گردید. نتایج آزمایش‌های تجربی نشان می‌دهد با یک آزمایش کشش سادهٔ استاندارد مقادیر لازم برای مدل‌سازی عددی استخراج می‌شود و این مدل غیر خطی توانایی خوبی در مدل‌سازی فرآیند گسیختگی و شکست مادهٔ آلومینیومی دارد. باتوجه به اهمیت مقدار s در رابطهٔ پارامتر آسیب بنورا می‌توان با تغییر مقدار s، مدل بنورا را بهبود داد. هم‌چنین با انجام آزمایش کشش بر روی قطعهٔ سوراخ‌دار، مشخص شد که این مدل برای حالت‌های بارگذاری که سبب تولید تنش غیر یکنواخت در ماده می‌شود نیز قابل استفاده است ولیکن دقت آن کاهش می‌یابد. پیشنهاد می‌گردد مطالعه برروی توسعهٔ دقیق‌تر مدل و مواد غیرایزوتوپیک، بارگذاری متناوب، بارگذاری در دمای بالا، استفاده از روابط کارسختی مناسب‌تر برای تکمیل این مدل و ارتقای آن انجام شود. هم‌چنین سایر مدل‌های آسیب پیوسته نیز مورد مطالعه قرار گیرند.

فهرست علائم

$\vec{n}$	بردار نرمال
$A_0^{(n)}$	سطح مقطع نامی در المان حجمی مرجع
A_{eff}^{n}	سطح مؤثر در المان حجمی مرجع
D	متغیر آسیب
σ	تنش
Ψ	انرژی آزاد هلمتز
T	دما
r	متغیر داخلی سختی یکنواخت
x	متغیر داخلی سختی جنبشی
Y	نرخ آزادسازی انرژی کرنش شکست
E	مدول الاستیک
σ_{eq}	تنش معادل ون میزز
σ_H	تنش هیدرواستاتیک
$\dot{\varepsilon}^p$	نرخ کرنش
$\dot{D}$	نرخ تغییرات آسیب
x_k	نرخ تغییرات سختی دینامیکی
F	پتانسیل اتلاف
F_D	توزیع پتانسیل آسیب
$\dot{\lambda}$	نرخ کرنش پلاستیک
S	ثابت ماده
S_0	توان مخصوص شکست
n	توان کارسختی
ε_{th}	کرنش آستانه
ε_{cr}	کرنش بحرانی

مراجع

1. Gross, D. and Seelig, T., "Fracture Mechanic: With an introduction to Micromechanics", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Second edition, (2011).
2. Sun, C. and Jin, Z.-H., "Fracture Mechanics", Elsevier Science Publishing Co Inc, San Diego, United States, (2012).
3. Bui, H.D., "Fracture Mechanics: Inverse Problem and Solutions", Springer Netherlands, (2006).

٤. میرزایی مجید، کریمی رضا، «تعیین سرعت رشد ترک در پره توربین گازی براساس مکانیک شکست»، مجلهٔ فنی و مهندسی مدرس، جلد ٦، صص ٥١-٥٦، (زمستان ١٣٨٠).

5. Lemaitre, J., "A continuous damage mechanics model for ductile fracture", Journal of Engineering Materials and Technology, Vol. 107, pp. 83-89, (1985).
6. Hoff, N., "The necking and the rupture of rods subjected to constant tensile loads", Journal of Applied Mechanics, Vol. 20, No. 1, pp. 105-108, (1953).
7. Kachanov, L.M., "Rupture time under creep conditions", International Journal of Fracture, No. 8, pp. 26–31, (1958).
8. Rice, J.R. and Tracy, D.M., "On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 17, No. 3, pp. 201-217, (1969).
9. Wang, J. and Chow C.L., "Subcritical crack growth in ductile fracture with continuum", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 33, No. 2, pp. 309-317, (1989).
10. Chandrakanth, S. and Pandey P.C., "An isotropic damage model for ductile", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 50, No. 4, pp. 457-465, (1995).
11. Bonora, N., "A nonlinear CDM model for ductile failure", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 58, No. 1/2, pp. 11–28, (1997).
12. Garrison, W.M. and Moody N.R., "Ductile fracture", Journal of Physics and Chemistry of Solids, Vol. 48, Issue 11, pp. 1035–1074, (1987).
13. Bonora, N., "On the effect of triaxial state of stress on ductility using nonlinear CDM model", International Journal of Fracture, Vol. 88, pp. 359–371, (1998).
14. Pardoen, T. and Hutchinson J.W., "An extended model for void growth and coalescence", Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 48, pp. 2467–2512, (2000).
15. Bruunig, M., "Numerical analysis of anisotropic ductile continuum damage", Comput. Methods Appl. Mech. Eng., Vol. 192, pp. 2949–2976, (2003).
16. Bonora, N. and Milella, P.P., "Constitutive modeling for ductile metals behavior incorporating strain rate, temperature and damage", International Journal of Impact Engineering, Vol. 26, pp. 35-64, (2001).
17. Milella, P.P., "Temperature and strain rate dependence of mechanical behavior of body-centered cubic structure materials", Proc. TMS Fall Meeting '98, Chicago, Illinois, (1998).
18. Benzerga, A. and Besson J., and Pineau, A. "Anisotropic ductile fracture, Part II: theory" Acta Materialia, Vol. 52, pp. 4639-4650, (2004).
19. Mashayekhi, M. and ZiaeiRad, S. "Identification and validation of a ductile damage model for A533 steel", Journal of Materials Processing Technology, Vol. 17, pp. 291-295, (2006).
20. Thakkar, B.K. and Pandey, P., "A high-order isotropic continuum damage", International Journal of Fracture, Vol. 16, pp. 403-426, (2007).
21. Pirondi, A., Bonora, N., Steglich, D., Brocks, W. and Hellmann, D., "Simulation of failure under cyclic plastic loading by damage models", International Journal of Plasticity, pp. 2146–2170, (2006).
22. Reddy, J.N., "An Introduction to the Finite Element Method", McGraw Hill Series in Mechanical Engineering, (2006).
23. Sehat, R., "study on aluminum damage using CDM theory", MSc. Thesis, Aerospace Research institute, Tehran, (2013).
24. ABAQUS analysis user manual 6.11.